

Отзыв

на PhD диссертацию «Метод тепловых полиномов и специальных функций для задач теплопроводности в областях со свободными границами и их приложения», представленную к защите PhD докторантом Наурызом Таргыном Атанбековичем по специальности 6D070500 – математическое и компьютерное моделирование.

Диссертация посвящена разработке математических моделей теплофизических процессов взаимодействия электрической дуги с электродами, которые базируются на задачах стефановского типа в областях, вырождающихся в начальный момент времени. Сложность их решения состоит в том, что они являются многопараметрическими, и численные методы решения не способны дать ответ о взаимовлиянии этих многочисленных параметров на динамику процессов тепло- и массопереноса. Аналитические методы основаны, как правило, на редукции первоначальной задачи Стефана к системе нелинейных интегральных уравнений. В случае, когда в начальный момент времени область вырождается в точку, такие интегральные уравнения становятся сингулярными, и их решение крайне затруднено. В представленной работе предлагается альтернативный метод решения, при котором оно представляется в виде линейной комбинации (ряд или конечная сумма) тепловых полиномов и специальных функций с неопределенными коэффициентами, удовлетворяющих а priori уравнению теплопроводности. Коэффициенты выбираются так, чтобы обеспечить точно или приближенно краевым условиям. Основное достоинство этого метода состоит в том, что в силу принципа максимума погрешность приближенного решения не превышает погрешности аппроксимации краевых условий, которую можно оценить.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, приложения и списка использованной литературы. В первой главе даются основные определения и свойства тепловых полиномов и специальных функций, которые будут использованы в дальнейшем для решения поставленных задач. Здесь следует отметить полученное диссертантом распространение известных ранее свойств одномерных тепловых потенциалов, а также комбинацию вырожденных гипергеометрических функций для случая обобщенного уравнения теплопроводности.

Вторая глава посвящена решению различных задач типа Стефана с помощью тепловых полиномов и интегральных функций ошибок. Используемый автором метод решения основан на разложении решения в ряды композиций функций на базе формулы Фаа ди Бруно, и требует скрупулезного анализа и большой вычислительной работы, с которой диссертант успешно справился. Он продемонстрировал хорошую технику анализа решений сложных систем уравнений и получил результаты, которые могут быть использованы в практических расчетах динамики теплофизических процессов в электрических контактах.

В третьей главе работы рассмотрены задачи типа Стефана с усиленной нелинейностью, которая связана не только с самим условием Стефана на границе фазового перехода, но и с нелинейной температурной зависимостью коэффициентов теплопроводности, удельной теплоемкости и плотности. Задачи подобного типа привлекают повышенное внимание в последнее время в связи с моделированием электродуговых процессов, где параметры дуги существенно зависят от температуры. Т. Наурызу удалось обобщить метод подобия для решения подобных

задач на случай сферического уравнения теплопроводности. В соответствии с этим подходом рассматриваемая задача Стефана была редуцирована к системе нелинейных интегральных уравнений, разрешимость которой была доказана. Этот метод оказался эффективным не только для однофазной, но и для двухфазной задачи Стефана для сферического уравнения теплопроводности. Полученный результат был использован для математического моделирования динамики процессов в короткой дуге при самопроизвольном отбросе электрических контактов в период перехода металлической фазы дуги в газовую фазу. В частности, было показано, что силы давления металлического пара сравнимы по величине с электродинамическими силами и играют определяющую роль в механизме самопроизвольного отброса. Это результат получил высокую оценку на 21 Международной конференции по явлениям в электрических контактах (ICES-2021, Online, Швейцария, 7-12 июня 2021 г.), где он был доложен.

Публикации достаточно полно освещают результаты выполненной работы. Следует отметить, что в совместных публикациях мне принадлежит лишь постановка задач, а огромная работа по их решению является заслугой диссертанта. Он продемонстрировал свое умение ориентироваться в сложных вопросах практического решения и доведения полученных результатов до практического применения. Вместе с тем он показал умение не только решать, но и самому ставить задачи, требующие решения. В частности, постановка обратных задач Стефана, метод коллабораций и вариационный метод для их решения принадлежат самому диссертанту.

Оценивая работу в целом, можно заключить, что она вносит существенный вклад в развитие методов решения задач со свободной границей и моделирование электродуговых процессов, а ее автор, Е. Наурыз, заслуживает присуждения ему искомой степени PhD по специальности математическое и компьютерное моделирование.

Научный консультант, д.ф.-м.н., профессор, академик НАН РК



С.Н. Харин

Review

for PhD dissertation " The method of heat polynomials and special functions for the problem of heat equation in regions with free boundaries and their application ", presented for PhD defense by doctoral student Nauryz Targyn Atanbekovich, specialty 6D070500 - Mathematical and computer modeling.

The dissertation is devoted to the development of mathematical models of thermophysical processes of interaction of an electric arc with electrodes, which are based on Stefan-type problems in areas that degenerate at the initial moment of time. The complexity of their solution lies in the fact that they are multiparametric, and numerical methods of solution are not able to give an answer about the mutual influence of these numerous parameters on the dynamics of heat and mass transfer processes. Analytical methods are based, as a rule, on the reduction of the original Stefan problem to a system of nonlinear integral equations. In the case when the domain degenerates to a point at the initial moment of time, such integral equations become singular, and their solution is extremely difficult. In the presented work, an alternative solution method is proposed, in which it is represented as a linear combination (series or finite sum) of heat polynomials and special functions with indeterminate coefficients that satisfy a priori the heat equation. The coefficients are chosen to provide exactly or approximately the boundary conditions. The main advantage of this method is that, due to the maximum principle, the error of the approximate solution does not exceed the error of the approximation of the boundary conditions, which can be estimated.

The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, an appendix, and a list of references. In the first chapter, the main definitions and properties of heat polynomials and special functions are given, which will be used in the future to solve the problems posed. Here we should note the extension of previously known properties of one-dimensional heat potentials obtained by the dissertator, as well as a combination of degenerate hypergeometric functions for the case of a generalized heat equation.

The second chapter is devoted to solving various Stefan-type problems using heat polynomials and integral error functions. The solution method used by the author is based on the expansion of the solution into series of compositions of functions based on the Faà di Bruno formula and requires a rigorous analysis and a lot of computational work, which the dissertation successfully completed. He demonstrated a good technique for analyzing solutions to complex systems of equations and obtained results that can be used in practical calculations of the dynamics of thermophysical processes in electrical contacts.

In the third chapter of the work, Stefan-type problems with enhanced nonlinearity are considered, which are associated not only with the Stefan condition at the phase transition boundary itself, but also with the nonlinear temperature dependence of the thermal conductivity coefficients, specific heat capacity, and density. Problems of this type have attracted increased attention in recent years in connection with the simulation of electric

processes, where the arc parameters depend significantly on temperature. T. Nauryz managed to generalize the similarity method for solving similar problems to the case of a spherical heat equation. In accordance with this approach, the considered Stefan problem was reduced to a system of nonlinear integral equations, the solvability of which was proved. This method turned out to be effective not only for the single-phase, but also for the two-phase Stefan problem for the spherical heat equation. The result obtained was used for mathematical modeling of the dynamics of processes in a short arc with spontaneous ejection of electrical particulars, it was shown that for the pressure force of a metal vapor they are comparable in magnitude with electrodynamic forces and play a decisive role in the mechanism of spontaneous ejection. This result was highly appreciated at the 21st International Conference on Phenomena in Electrical Contacts (ICEC-2021, Online, Switzerland, June 7-12, 2021), where it was presented.

Publications quite fully cover the results of the work performed. It should be noted that in joint publications I am responsible only for the formulation of problems, and the great work on their solution is the merit of the dissertation student. He demonstrated his ability to navigate complex issues of practical solution and bring the results to practical application. At the same time, he showed the ability not only to solve, but also to set tasks that needed to be solved. In particular, the formulation of Stefan's inverse problems, the collaboration method, and the variational method for solving them belong to the dissertation author himself.

Evaluating the work, we can conclude that it makes a significant contribution to the development of methods for solving problems with a free boundary and modeling electric arc processes, and its author, T. Nauryz, deserves to be awarded the required PhD degree in mathematical and computer modeling.

Scientific consultant,
Doctor of Physical and Mathematical Science,
professor, academician of NAN RK



S.N. Kharin